- *esim.* $a^{n-1} \in L_{match}$, $a^{n+1} \in L_{match}$, *mutta automaatti ei tunnista niitä*

Entä kieli $\{a^k b^k \mid k \geq 0\}*$?

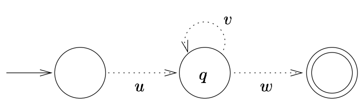
$\Rightarrow$ ei voida tunnistaa äärellisellä automaatilla (eikä siten myöskään mv. aritmeettisia lausekkeita)

"Pumppauslemma" formalisoi tämän rajallisen muistin idean. Ideana on, että mitä tahansa annetun säännöllisen kielen riittävän pitkää merkkijonoa voidaan "pumpata" keskeltä, ilman että kielen tunnistava äärellinen automaatti huomaa muutosta

> *Lemma* [Pumppauslemma]: Olkoon A säännöllinen kieli. Tällöin on olemassa $n \geq 1$ s.e. mikä tahansa $x \in A$, $|x| \geq n$, voidaan jakaa osiin $x = uvw$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, ja $uv^i w \in A$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$

Todistus: Olk. M jokin A:n tunnistava deterministinen äärellinen automaatti ja $n = M$:n tilojen määrä. Tarkastellaan automaatin läpikäymiä tiloja sen tunnistaessa merkkijonoa $x \in A$, $|x| \geq n$:

- Koska $|x| \geq n \Rightarrow$ täytyy kulkea jonkin tilan kautta (ainakin) kaksi kertaa (itse asiassa jo x:n n:ää ensimmäistä merkkiä käsitellessään)
- Olk. q ensimmäinen tila, jonka automaatti toistaa x:ää käsitellessään.
- Olk. $u = M$:n käsittelemä x:n alkuosa sen tullessa ensimmäisen kerran tilaan q
- Olk. $v =$ se osa x:stä u:n jälkeen jonka M käsittelee ennen ensimmäistä paluutaan q:hun, ja
- $w =$ loput x:stä
- Tällöin on $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, ja $uv^i w \in A$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\square$



Kuva 3.12: Merkkijonon $x = uvw \in A$ pumppaus.

Huom! Pumppauslemma on kiinnostava vain äärettömille kielille. (Äärellisille kielille, jotka kaikki ovat säännöllisiä, voidaan valita $n = \max\{|x| \mid x \in L\} + 1$, jolloin ei ole olemassa yhtään $x \in L$ s.e. $|x| \geq n$).