Luku 1

Matemaattisia peruskäsitteitä

Tässä luvussa kerrataan lyhyesti joitain matemaattisista käsitteitä kuten loogiset symbolit, joukot, relaatiot ja funktiot, joukkojen numeroituvuus ja ylinumeroituvuus sekä esitellään hyödyllisiä matemaattisia todistusmenetelmiä.

1.1 Loogisia symboleita

Olkoon P ja Q *propositioita* eli totuusarvoisia lauseita, jotka kuvaavat jonkin asiantilan. Esimerkiksi P=”Kuu on juustoa”, Q=”Napoleon asuu Kuussa”. Tällöin P:stä ja Q:sta voidaan muodostaa uusia, rakenteisia propositioita seuraavilla loogisilla operaattoreilla:

- *Negaatio* $\neg P$: P on epätosi (ohjelmointikielissä not P, $!P$)
- *Disjunktio* $P \vee Q$: joko P tai Q on tosi (tai molemmat ovat tosia) (ohjelmointikielissä P or Q, $P||Q$)
- *Konjunktio* $P \wedge Q$: sekä P että Q ovat tosia (P and Q, $P\&\&Q$)
- *Implikaatio* $P \Rightarrow Q$: ”jos P, niin Q” ($\equiv \neg P \vee Q$)
- *Ekvivalenssi* $P \Leftrightarrow Q$: ”P jos ja vain jos Q” ($\equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$)

Lisäksi usein tarvitaan symboleita $\forall$ (*universaalikvanttori*, ”kaikille”, ”jokaiselle”) sekä $\exists$ (*eksistenssikvanttori*, ”on olemassa”, ”jollekin”). Esimerkiksi $\forall x, x \in \mathbb{N}$ ”jokaiselle luonnolliselle luvulle x pätee...”, $\exists x, x \in \mathbb{N}$ ”jollekin luonnolliselle luvulle x pätee...”

1.2 Joukot

Joukko on kokoelma olioita eli joukon *alkioita*, esimerkiksi $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tai $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$. Merkitään $a_i \in A$ ("a_i kuuluu joukkoon A"). Joukon erikoistapaus on *tyhjä joukko* $\emptyset$, joka ei sisällä yhtään alkiota. *Perusjoukko* on (asiayhteydestä riippuva) kokoelma oliota, joka on valittu tarkastelun kohteeksi, esimerkiksi luonnolliset luvut $\mathbb{N}$, reaaliluvut $\mathbb{R}$, tai kirjainmerkit.

Joukkojen välillä voi vallita seuraavia suhteita:

- A on B:n *osajoukko*: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.
- A on B:n *aito osajoukko*: $A \subset B$: $A \subseteq B \wedge A \neq B$.
- A:n ja B:n *yhdiste*: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.
- A:n ja B:n *leikkaus*: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.
- A:n ja B:n *erotus*: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.
- A:n *komplementti* perusjoukossa E: $\overline{A} = E \setminus A$.
- A:n ja B:n *karteesinen tulo*: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$, missä kukin (x, y) on *järjestetty pari*.
- joukon A *potenssijoukko*: $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$.
  esim. jos $A = \{a, b, c\}$, niin $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

1.3 Relaatiot

Relaatio R kuvaa kahden (tai useamman) joukon alkioiden välillä vallitsevaa suhdetta. Esimerkiksi joukkojen A ja B välinen (binääri-)relaatio määritellään joukon $A \times B$ osajoukkona:

$$R = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B \wedge R(a, b)\}.$$

Esimerkiksi olkoon A ja B luonnollisia lukuja ja R on seuraajarelaatio:

$$R(a, b), \text{ jos ja vain jos } b = a + 1.$$

Tällöin relaatio koostuu pareista $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), ...\}$. Relaation $R \subseteq A \times B$ *käänteisrelaatio* $R^{-1} \subseteq B \times A$ on relaatio

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}.$$

1.4 Funktiot

Funktio on relaation erikoistapaus, joka liittää annetun joukon jokaiseen alkioon toisen annetun joukon määrätyn alkion. Määritellään funktio seuraavasti:

Määritelmä 1.1 *Olkoon f joukkojen A ja B välinen relaatio $f \subseteq A \times B$, joka täyttää seuraavat kaksi ehtoa:*

1. *(Määrittelyehto) Jokaista A:n alkiota x vastaa B:n alkio y eli*

$$\forall x \in A \ \exists y \in B \ (x, y) \in f.$$

2. *(Yksikäsitteisyysehto) Jokaista A:n alkiota x vastaa vain yksi alkio y B:ssä eli*

$$\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B \ ((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Tällöin f on funktio eli kuvaus $f : A \to B$ määrittelyjoukosta A maalijoukkoon B(kuva 1.1).

Mikäli funktio f kuvaa pisteen $x \in A$ pisteelle $y \in B$, sanotaan y:tä x:n *kuvaksi.* Merkitään $y = f(x) \ \Leftrightarrow \ (x, y) \in f$. Jos $C \subseteq A$, niin joukko $f(C)$ on C:n kuvajoukko

$$f(C) = \{f(x) | x \in C\}.$$

Funktion $f : A \to B$ *arvojoukko* on määrittelyjoukon A kuvajoukko $f(A)$.

Joukko $f^{-1}(D)$ on D:n *alkukuva*

$$f^{-1}(D) = \{x | f(x) \in D\},$$

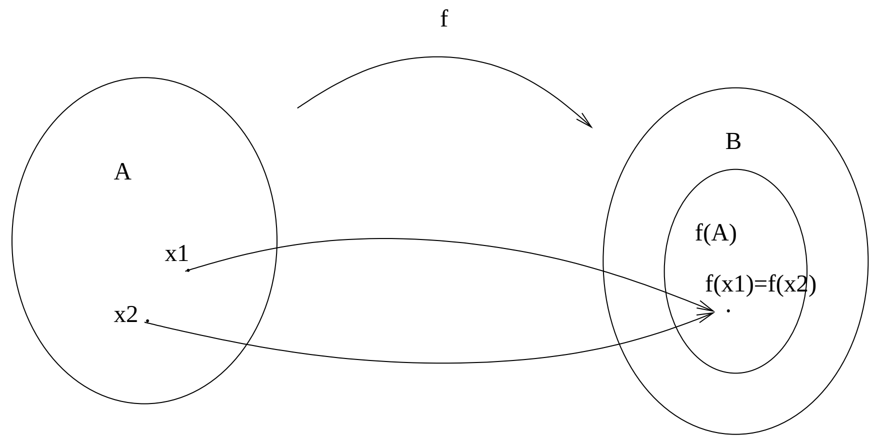
missä f^{-1} on f:n käänteisrelaatio. Relaatio f^{-1} on f:n *käänteisfunktio* eli *käänteiskuvaus*, jos f^{-1} täyttää funktion ehdot.

Funktioiden erikoistapauksia ovat *injektio*, *surjektio* ja *bijektio*, jotka määritellään seuraavasti:

Funktio $f : A \to B$ on

- **injektio**, jos jokaisella arvojoukon kuva-alkiolla on vain yksi alkukuva eli

$$\forall x_1, x_2 \in A \ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$



Kuva 1.1: A=funktion määrittelyjoukko, B=maalijoukko, f(A)=arvojoukko. f ei ole injektio, koska x1 ja x2 kuvautuvat samalle pisteelle, eikä surjektio, koska kaikilla B:n pisteillä ei ole alkukuvaa A:ssa.

- **surjektio**, jos jokaisella B:n alkiolla on alkukuva A:ssa eli

$$\forall y \in B\ \exists x \in A(y = f(x)).$$

- **bijektio**, jos f on sekä surjektio että injektio.

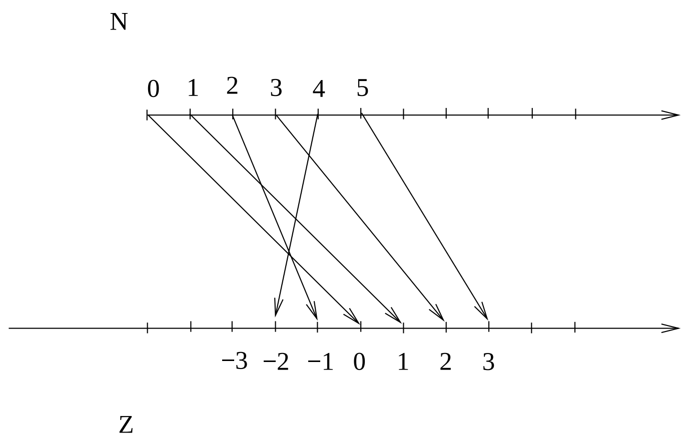
  Huom! f on bijektio $\Leftrightarrow$ f:llä on käänteisfunktio.

- esim. 1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = |x|$ on surjektio, mutta ei injektio.
- esim. 2. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ on injektio, mutta ei surjektio.
- esim. 3. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ on bijektio, jonka käänteiskuvaus on $f(y) = \sqrt{y}$.

1.5 Numeroituvuus

Määritelmä 1.2 *Joukko X on* numeroituva*, jos*

1. *X on äärellinen tai*



Kuva 1.2: Esimerkiksi kokonaisluvut voidaan numeroida luonnollisilla luvuilla.

2. *On olemassa bijektio* $f : \mathbb{N} \to X$*, jolle*

$$X = \{f(n) | n \in \mathbb{N}\}.$$

Intuitiivisesti ajatellen X:n alkiot voidaan siis järjestää ja indeksoida luonnollisilla luvuilla: $X = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Esimerkiksi parittomien luonnollisten lukujen joukko $X = \{1, 3, 5, ...\}$ on numeroituva, sillä voidaan määritellä bijektio $f : \mathbb{N} \to X$

$$f(n) = 2n + 1.$$

Jos X ei ole numeroituva, se on *ylinumeroituva*. Esimerkiksi reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ sekä luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ovat ylinumeroituvia.

1.6 Todistusmenetelmiä

Seuraavassa esitellään joitain hyödyllisiä todistusmenetelmiä.

Matemaattinen induktio

Halutaan todistaa, että jokin väite $P(n)$ pätee kaikille luonnollisille luvuille. Väite todistetaan kahdessa osassa:

1. Perustapaus $n = 0$: Todistetaan, että väite pätee tapauksessa $P(0)$

2. Induktioaskel: Todistetaan, että kaikilla n $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Kohdista 1+2 seuraa, että väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ($P(0)$ pätee, josta saadaan induktioaskeleella $P(1)$, tästä puolestaan $P(2)$ jne.) Induktioaskel todistetaan yleensä *induktio-oletuksen* avulla:

- Oletetaan, että $P(n)$ pätee kaikilla $n \leq k$.
- Osoitetaan väite tapauksessa $n = k + 1$.

Esimerkki 1.1 *Väite:* $\Sigma_{i=1}{}^{n} i = \frac{n^2+n}{2} \forall n \geq 0$
Todistus:

1. $n = 0$ $\Sigma_{i=1}^{n} i = 0 = \frac{0^2+0}{2}$
2. *Induktio-oletus:* $\exists k \in \mathbb{N}$ *s.e. väite pätee kaikilla* $n \leq k$
   Tapaus $n = k + 1 : \Sigma_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1)$
   Ol. mukaan $\Sigma_{i=1}^{k} i = \frac{k^2+k}{2}$, *joten*
   $\Sigma_{i=1}^{k+1} i = \frac{k^2+k}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$ □

Epäsuora todistus (Todistus antiteesillä eli vastaväitteellä)

Halutaan todistaa väite "jos P, niin Q". Oletetaan P ja tehdään vastaväite $\neg Q$. Mikäli näistä voidaan johtaa ristiriita, on väite tosi.

- Idea: implikaatio $P \Rightarrow Q$ tosi muulloin, paitsi kun $P \wedge \neg Q$ ($P \Rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$)
- Huom! Ei tiedetä, mikä ristiriita halutaan johtaa!

Esimerkki 1.2 *Olkoon U ääretön joukko ja S sen äärellinen osajoukko ja T S:n komplementti U:ssa.*

Väite: T on ääretön.
Todistus: Vastaväite: T on äärellinen. Koska sekä S ja T ovat äärellisiä, on myös U äärellinen, mikä merkitsee ristiriitaa (U oli ääretön). □

Tehtävä: Kuinka todistaisit väitteen: "Maailmassa on vähintään kaksi ihmistä, joilla on yhtä monta hiusta päässään"?

Kontrapositiolla todistaminen

Halutaan todistaa väite ”jos P, niin Q”. Todistetaan sen sijaan ekvivalentti lause ”jos ei Q, niin ei P” $(P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P)$

- Voidaan ajatella antiteesimenetelmän erikoistapauksena. Oletetaan P ja $\neg Q$ ja yritetään johtaa $\neg P$ – nyt siis tiedetään, mikä ristiriita halutaan johtaa $(P \wedge \neg P)$.

Eksistenssi- ja universaalilauseiden todistuksesta

Muotoa ”On olemassa $x \in X$, jolle pätee...” ja ”Kaikille $X \in X$ pätee...” olevat väitteet voidaan joskus todistaa suoraan.

- Eksistenssilause $\exists x \in X\ P(x)$: konstruoi tällainen x (arvaa, tuota, keksi generoiva algoritmi jne.) Huom! Osoitettava, että haluttu ominaisuus myös pätee!
- esim. väite ”Himalajalla on vuori, joka on korkeampi kuin mikään muu vuori maailmassa.”
- Universaalilause $\forall x \in X\ P(x)$: valitse mielivaltainen x X:stä ja osoita, että sille pätee haluttu ominaisuus $P(X)$.
- esim. Olk. $S = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 3x + 2 \leq 0)\}$ ja $T = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$.
  Väite: $S = T$.

Epätodeksi osoittaminen

Muotoa $\forall x \in X\ P(x)$ olevien väitteiden osoittaminen epätodeksi on huomattavasti helpompaa kuin oikeaksi todistaminen – riittää antaa yksikin vastaesimerkki joukosta X, jolla väite ei päde. Esimerkiksi väite ”Kaikki linnut osaavat lentää” on epätosi, koska esimerkiksi pingviinit eivät osaa lentää.

1.7 *Ekskursio: Transfiniittiset ordinaaliluvut

Transfiniittiset ordinaali- eli järjestysluvut tarkoittavat äärettömiä lukuja, joille silti voidaan määritellä järjestys. Mm. David Hilbert, Georg Cantor, Kurt Gödel ja Rudy Rucker ovat tarkastelleet tällaisiin lukuihin liittyviä ongelmia.

ω Omega

ω eli $\aleph_0$ (alef-nolla) on suurin normaali järjestysluku, ts. lukujonon $0, 1, 2, 3, \ldots$ suurin alkio $\lim n$. ω voidaan määritellä seuraavasti: ω on ensimmäinen sellainen luku a, jolle $a + 1 = a$. Esim. $1 + \omega = \omega$, $2\omega = \omega$.

ω:lle voidaan kuitenkin määritellä toimivat yhteen- ja kertolasku uusien transfiniittisten lukujen generoimiseksi. Sovitaan, että $\omega + 1 =$ ω:n seuraaja ja $\lim_{n\to\omega}(\omega + n) = \omega + \omega = 2\omega$.

Nyt $\lim_{n\to\omega}(\omega \times 2 + n) = \omega \times 3$, $\lim_{n\to\omega}(\omega \times n) = \omega \times \omega = \omega^2$. Samoin saadaan $\omega^3, \omega^4, \ldots, \omega^\omega$.

ω^2 ja ω^ω voidaan määritellä seuraavasti: ω^2 on ensimmäinen sellainen ordinaaliluku a, jolle $\omega + a = a$ ja ω^ω on ensimmäinen ordinaaliluku a, jolle $\omega \times a = a$. (Tämä voidaan järkeillä seuraavasti: $\omega \times \omega^\omega = \omega^{\omega+1} = \omega^\omega$, koska $1 + \omega = \omega$).

Huom! Transfiniittisten lukujen yhteen- ja kertolasku eivät ole vaihdannaisia! $1+\omega = \omega \neq \omega + 1$

ϵ_0 Epsilon-0

Vielä suurempia lukuja saadaan konstruoimalla lukuja sisäkkäisillä potenssiinkorotuksilla ts. $\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$. Määritellään ϵ_0 ensimmäiseksi ordinaaliluvuksi a, jolle $\omega^a = a$. ϵ_0 voidaan kuvailla parhaiten ottamalla käyttöön *tetraatio-operaatio* ${}^a b$ ("b teroituna a:han"), joka tarkoittaa b:n a-kertaista potenssia eli eksponetiaalipinoa $b^{b^{\cdots^b}}$, jossa b toistuu a kertaa. Tetraatio-operaatiolla saadaan nopeasti suuria lukuja, esim. ${}^3 10 = 10^{10 \text{ miljardia}}$ (1 ja perässä 10 miljardia 0:aa), ${}^2\omega = \omega^\omega$, ${}^3\omega = \omega^{\omega^\omega}$. Nyt $\epsilon_0 =^\omega \omega$.

Vieläkin suurempia ordinaalilukuja saadaan sisäkkäisillä tetraatio-operaatioilla!

$\aleph_1$ Alef-1

$\aleph_1$ on ensimmäinen ei-ordinaaliluku ts. $\aleph_1$:stä alkiosta koostuvaa joukkoa ei voi mitenkään järjestää numerojärjestykseen. $\aleph_1$:n määritelmä perustuu *mahtavuuden* käsitteeseen. Sanotaan, että joukot A ja B ovat yhtä mahtavia, jos on olemassa bijektio $f : A \to B$ (ts. funktio on määritelty kaikille A:n alkioille ja jokaista B:n alkiota vastaa täsmälleen yksi A:n alkio). Määritellään $\aleph_1$ seuraavasti: $\aleph_1$ on ensimmäinen ordinaaliluku, joka on mahtavampi kuin ω. Ts. ei ole olemassa mitään bijektiota, joka kuvaisi $\aleph_1$ alkiota ω:lle alkiolle.

Hilbertin hotelli

$\aleph_1$:n suuruus voidaan ymmärtää Hilbertin hotellivertauksen avulla. Hilbertin hotellissa on ω huonetta, jotka on numeroitu luonnollisilla luvuilla $0, 1, 2, 3, \ldots$. Hilbertin hotelli on sikäli paradoksaalinen, että täytyttyäänkin siihen mahtuu vielä vieraita, eikä kukaan joudu jakamaan huonettaan! Oletetaan esimerkiksi, että hotellissa on ω vierasta, yksi kussakin huoneessa, ja hotelliin saapuu vielä yksi vieras. Kuinka hänet voidaan majoittaa? Helposti! Vieras sijoitetaan huoneeseen 0, joka saadaan tyhjäksi siirtämällä vieras 0 huoneeseen 1, joka puolestaan saadaan tyhjäksi sijoittamalla vieras 1 huoneeseen 2 jne. Entäpä jos hotelliin saapuu ω:n matkailijan seurue? Nyt voidaan sijoittaa ensimmäiset ω vierasta parillisiin huoneisiin ja uudet ω vierasta parittomiin huoneisiin. Samoin voidaan sopivilla järjestelyillä sijoittaa ω^2, ω^ω tai jopa ϵ_0 vierasta. Tämän uskomattoman hotellin majoituskapasiteetilla on kuitenkin raja – nimittäin $\aleph_1$. $\aleph_1$ on ensimmäinen sellainen luku, jonka suuruista matkustajajoukkoa hotelliin ei saada mahtumaan millään järjestelyllä.

Cantorin argumentti

Cantor osoitti v. 1873, että matemaattisessa avaruudessa on vähintään $\aleph_1$ pistettä. (Yleisemmin tämä tulos ilmaistaan sanomalla, että reaalilukujen joukko on ylinumeroituva). Sen sijaan ns. *jatkumo-ongelma* – onko matemaattisessa avaruudessa kenties enemmän kuin $\aleph_1$ pistettä – on edelleen avoin ongelma. Cantorin todistuksessaan käyttämä tekniikka (ns. *Cantorin diagonaaliargumentti*) on siksi näppärä, että esitämme idean seuraavaksi:

Väite: Reaalilujen joukko $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

Todistus: Meidän riittää tutkia jotain $\mathbb{R}$:n osajoukkoa ja osoittaa, että se on ylinumeroituva. Valitaan tutkittavaksi osaväli $]0, 1[$ ja tehdään vastaväite:
Vastaväite: Väli $]0, 1[$ on numeroituva. Toisin sanoen voimme numeroida kaikki

reaaliluvut x, $0 < x < 1$ luonnollisilla luvuilla. Olkoon luvun x järjestysnumero $r(x)$ (ts. on bijektio $r : \,]0,1[\to \mathbb{N}$). Oletetaan, että voisimme esittää välin $]0,1[$ reaaliluvut äärettömänä matriisina M, jossa kutakin luonnollista lukua vastaa välin reaaliluku esitettynä äärettömällä tarkkuudella. Matriisin alku voisi olla esim. seuraava:

$r(1)$: .**1**41592...
$r(2)$: .3**3**3333...
$r(3)$: .71**8**281...
$r(4)$: .414**2**13...
$r(5)$: .5000**0**0...

Muodostetaan nyt uusi reaaliluku seuraavasti: Luetaan matriisin diagonaalilla olevat digitit järjestyksessä ja vaihdetaan jokainen digitti joksikin toiseksi. Toisin sanoen luvun desimaalikehitelmässä $.d_1d_2d_3d_4...$ i:s desimaali $d_i \neq M[i][i]$ (i:nnen rivin i:s desimaali). Luvun alku voisi siis olla esimerkiksi .02719.... Tämä luku ei kuitenkaan voi esiintyä matriisissa, sillä se poikkeaa jokaisesta matriisin luvusta: 1. luvusta 1. digitin osalta, 2. luvusta 2. digitin osalta, 3.luvusta 3. digitin osalta jne. Kaikki välin $]0,1[$ reaaliluvut luettelevaa funktiota r ei siis voi olla olemassa!

(Huomaa, ettei auta, vaikka lisäisimmekin näin saamamme reaaliluvun matriisiin, sillä voisimme taas generoida samaan tapaan uuden reaaliluvun, joka ei esiinny listassa.)

Kirjallisuutta

Rucker, Rudy: White Light, or, What is Cantor's Continuum Problem? Ace Books, New York, 1982. (Huima scifi-romaani, jossa leikitellään äärettömyyksillä! Vieraillaan myös Hilbertin hotellissa.)

Rucker, Rudy: Mieli ja äärettömyys. Art House, 1998. (Helppolukuinen tietokirja, joka jatkaa White Light:in teemoista.)

Lem, Stanislaw: N. Ya. Vilenkin, Stories about Sets. Academic Press, New York, 1968. (Novellikokoelma, joka sisältää hauskan novellin Hilbertin hotellista.)

Hofstadter, Douglas R.: Gödel, Esser, Bach: An Eternal Golden Braid. Vintage Books, New York, 1989. (Luku XIII esittää helppotajuisesti Cantorin diagonaaliargumentin avulla, että on olemassa ohjelmallisesti ratkeamattomia ongelmia. Muutenkin sopivaa oheislukemistoa kurssille!)

1.8 Tehtäviä lukuun 1

1. Ns. Kyyhkyslakkaperiaate (Pigeonhole Principle) sanoo: Jos kyyhkysiä on enemmän kuin pesäkoloja ja jokainen kyyhkynen lentää johonkin pesäkoloon, niin ainakin yhdessä kolossa on enemmän kuin yksi kyyhkynen.

   Kuinka käy, jos pesäkoloja on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja ja kyyhkysiä yhtä monta kuin kokonaislukuja? Entä jos kyyhkysiä on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja, mutta jokainen kyyhkynen yrittää pesiä jokaisen toisen kyyhkysen kanssa eri pesissä? (Yhteen koloon mahtuu vain yksi pesä.)

2. Miten sijoittaisit $\omega \times \omega$ vierasta Hilbertin hotellin ω:aan huoneeseen?

3. Hilbertin hotellin vieraskirjan jokaisella sivulla on vain äärellisen monta nimeä ja uusien vieraiden on kirjoitettava nimensä aina seuraavalle tyhjälle riville. Kuinka monta sivua kirjassa on oltava, jotta uusien vieraiden nimille olisi tilaa (järjestämättä nimiä uudelleen), niin kauan kuin vieraita voitaisiin sijoittaa hotelliin (mahdollisesti järjestämällä uudelleen)?

4. Etsi virhe seuraavasta todistuksesta, jonka mukaan 2=1. Tarkastellaan yhtälöä $a = b$. Kerro molemmat puolet a:lla, jolloin saat $a^2 = ab$. Vähennä b^2 molemmilta puolilta, jolloin saat $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Jaa kumpikin puoli tekijöihin, $(a-b)(a+b) = b(a-b)$, ja jaa $(a-b)$:llä, jolloin saat $a + b = b$. Lopuksi oletetaan, että a ja b ovat 1, jolloin pätee $2 = 1$.

5. Olkoon X joukko ja X:n koko $n = |X|$. Todista induktiolla, että X:n potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

6. Mitä vikaa on seuraavassa induktiotodistuksessa, jonka mukaan kaikki kissat ovat samanvärisiä?

   Olkoon n kissojen lukumäärä. Jos $n = 1$, niin väite selvästi tosi (yksi kissa on aina samanvärinen, olipa väri mikä tahansa). Oletetaan nyt, että mille tahansa n:n kissan joukolle pätee, että kaikki kissat ovat samanvärisiä. Tarkastellaan sitten $n+1$:n kissan joukkoa. Valitsemalla näistä mitkä tahansa n kissaa (jotka voidaan valita $n+1$ eri tavalla) saadaan induktio-oletuksen perusteella samanväristen kissojen joukko. Siispä kaikki $n+1$ kissaa ovat samanvärisiä.

7. Todista seuraava väite: Jos juhlissa on $n (n \geq 2)$ henkilöä, niin vähintään kahdella henkilöllä on yhtä monta ystävää juhlissa.

8. Todista kontrapositiolla: Jos c on pariton kokonaisluku, niin yhtälöllä $n^2 + n - c = 0$ ei ole paritonta kokonaislukuratkaisua n:lle.