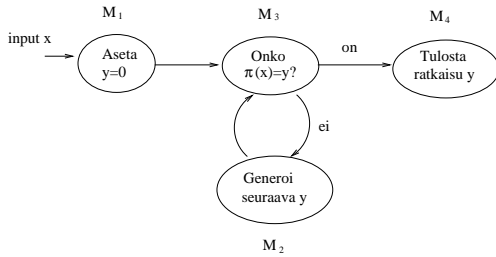


## Perusongelma

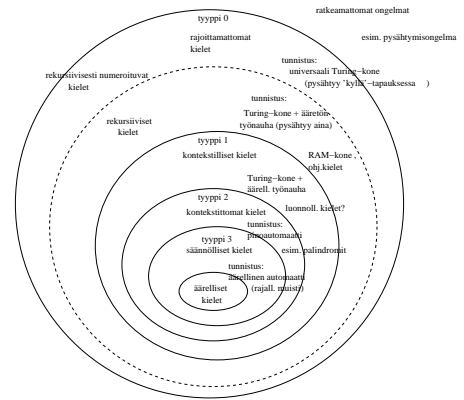
Annettu laskennallinen ongelma  $\pi$ . Kuinka vaikea se on?

$\Rightarrow$  voidaan arvioida vastaavan päätösongelman avulla:



2

Päätösongelman vaikeus selviää vastaavan formaalin kielen luokasta!



3

## Kielen osoittaminen säännölliseksi/epäsäännölliseksi

Päätösongelma "Onko  $A$  säännöllinen?" ei ole laskennallisesti ratkeava ongelma!

Jos haluat osoittaa kielen  $A$  säännölliseksi, voit

- antaa  $A$ :ta kuvaavan säännöllisen lausekkeen
- antaa äärellisen automaatin, joka tunnistaa kielen  $A$ , tai
- osoittaa, että  $A$  on tunnetusti säännöllisen kielen komplementti tai tunnetusti säännöllisten kielten yhdiste tai leikkaus. (Annettava näiden kielten säännölliset lausekkeet.)

Jos haluat osoittaa kielen  $A$  säännölliseksi, Sinun täytyy käyttää Pumpauslemmaa!

4

## Pumppauslemma

Lause (Pumppauslemma):

Olkoon  $A$  säännöllinen kieli. Tällöin on olemassa  $n \geq 1$  s.e. mikä tahansa  $x \in A$ ,  $|x| \geq n$ , voidaan jakaa osiin  $x = uvw$ ,  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , ja  $uv^i w \in A$  kaikilla  $i = 0, 1, 2, \dots$

5

Käyttö:

1. Mieti annettua kieltä: **mikä ominaisuus tekee kielen epäsäännölliseksi?** Usein ominaisuus koskee kahta sanan osaa, joiden välillä vallitsee jokin ehto.
2. Mieti, **mikä olisi yksinkertaisin, mieltävaltaisen pituinen merkkijono, jossa ominaisuus esiintyy.**
3. **Valitse  $n$  siten, että eheyshdon toinen osapuoli kuuluu ensimmäiseen  $n$ :ään merkkiin** ja sitä päästään pumppaamaan. (Yleisessä tapauksessa siis siten, että mikä tahansa merkkijonon ensimmäisen  $0..n$  merkin osajonon pumppaus rikkoo vaaditun ominaisuuden.)
4. **Testaa kaikki Pumppauslemman mukaiset jaot  $x = uvw, |uv| \leq n$  ja  $v \neq \epsilon$ .** Jokaisella jaolla kokeile pumppausta  $i$ :n arvoilla  $0, 2, 3, \dots$  kunnes löytyy sellainen  $i$ , että  $uv^i w \notin A$ .

**Huom!** Jos et opi Pumppauslemmaa, niin opettele ainakin askel 1.

6

## Kontekstitonta kieltä kuvaavan kieliopin muodostus

Ongelma: Annettu kontekstiton kieli  $L$ , laadi sen tuottava kontekstiton kielioppi  $G$ .

Mieti ensin, millaisen kielen määrittely kuvaa!

### Yksinkertaiset kielioppirakenteet

Sääntö	Kieli
$A \rightarrow a b$	$\{a, b\}$
$A \rightarrow aA \epsilon$	$L(a^*) = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$
$B \rightarrow bBc \epsilon$	$\{b^n c^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$
$B \rightarrow bbBc \epsilon$	$\{b^{2k} c^k \mid k = 0, 1, \dots\}$

8

## Tehtävä

Ovatko seuraavat kielet säännöllisiä? Perustele!

1.  $\{w|w \text{ on } a\text{:sta ja } b\text{:stä koostuva merkkijono, jonka pituus on } 3\}$
2.  $\{ww|w \in \{a, b\}^*\}$
3.  $\{w^*|w\text{:ssä yhtä monta } 1\text{:ä ja } 0\text{:aa}\}$
4.  $\{w|w\text{:ssä kaksi kertaa niin monta } 0\text{:aa kuin } 1\text{:ä}\}$

7

## Monimutkaisemmat rakenteet

Vinkki:

- Yritä esittää  $L$  useamman yksinkertaisen kielen yhdisteenä, tulona tai sulkeutmana!  
Esim.  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ ,  $L = L_1 L_2$  tai  $L = (L_1 \cup L_2)^*$
- Laadi osakielille  $L_1, L_2, \dots$  kieliopit. Olk. niiden alkusymbolit  $S_1, S_2$  ja  $S_3$ .
- Laadi sitten  $L$ :n kielioppi seuraavasti:

Kieli	Säännöt
$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$	$S \rightarrow S_1 S_2 S_3$
$L = L_1 L_2$	$S \rightarrow S_1 S_2$
$L = (L_1)^*$	$S \rightarrow S_1 S \epsilon$
$L = (L_1 \cup L_2)^*$	$S \rightarrow SA \epsilon, A \rightarrow S_1 S_2$

9

## Kieliopin osoittaminen moniselitteiseksi

Kieliopin osoittaminen yksi- tai moniselitteiseksi on laskennallisesti ratkeamaton ongelma!

- Kielioppi  $G$  on moniselitteinen, jos keksit yhdenkin merkkijonon  $x \in L(G)$ , jolla on ainakin kaksi erilaista jäsenyspuuta.
- Kieliopin yksiselitteisyyden osoitus hankalampaa.
- Jos kielioppi on lineaarinen tai  $LL(1)$ , se on myös yksiselitteinen. Mutta voi olla muulloinkin!

10

## Äärellinen automaatti $\Leftrightarrow$ lineaarinen kielioppi

Kontekstiton kielioppi on

- *oikealle lineaarinen*, jos sen kaikki produktiot ovat muotoa  $A \rightarrow \epsilon$  tai  $A \rightarrow aB$ , ja
- *vasemmalle lineaarinen*, jos sen kaikki produktiot ovat muotoa  $A \rightarrow \epsilon$  tai  $A \rightarrow Ba$ .

12

## Tehtävä

Laadi kielioppi, joka tuottaa kielen  $\{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \geq 0\}$ . Onko laatimasi kielioppi yksi- vai moniselitteinen?

Idea: esitetään kieli toisessa muodossa:  $a^m b^n c^n c^m$ . Jos  $A$  tuottaa  $b^n c^n$ :n, niin  $S$ :n tuotettava  $a^m A c^m$ .

11

Oikealle lineaarinen kielioppi voidaan muuntaa äärelliseksi automaatiksi ja päinvastoin seuraavilla vastaavuussäännöillä:

Äärellinen automaatti	Lin. kielioppi
tila $q$	välikesymboli $A_q$
lähtötila $q_0$	$S = A_{q_0}$
siirtymä $q \xrightarrow{a} q'$	sääntö $A_q \rightarrow aA_{q'}$
lopputila $q \in F$	sääntö $A_q \rightarrow \epsilon$

13

## Tehtävä

Kissastanian logiikkakoulussa on edetty kontekstittomiin kieliin. Tunnin aiheena on seuraava kieli:

Naukaisu voi alkaa yhdellä tai useammalla *miu*:lla ja lopussa on yhtä monta *mau*:ta. Välissä voi olla 0 tai useampia *u*-kirjaimia. Tai naukaisu on maukaisu, jota seuraa yksi tai useampi *au*. Maukaisu puolestaan alkaa *miau*:lla tai *mau*:lla, jota seuraa 0 tai useampia *u*-kirjaimia.

- a) Anna kielen tuottava kielioppi.
- b) Anna joitain esimerkkejä kielen sanoista.
- c) Laadi pinoautomaatti, joka tunnistaa kielen.